

العمدة الثالثة

ملاحظة

إن مجموعة الأعداد الأولية مجموعة غير متناهية

* أعداد فردية

نظن أن كل عدد من هذه الأعداد عدداً أولياً

$$F_n = 2^n + 1$$

$$F_0 = 3$$

$$F_1 = 5$$

$$F_2 = 17$$

$$1$$

عدد مرفوع $F_5 = (2^2)^5 + 1 = 2^{32} + 1$

أثبت أولر أن F_5 عدد مرفوع حيث $641 \mid F_5$

* ظن أنهم أن لصيغة $x^2 - x + 41$ أعداد أولية

$$x = 0, 1, \dots$$

لكنهم إجابات هذا الكلام غير دقيقة حيث الأعداد الأولية فقط هي $x=40$

أي أن الأعداد من $x=41$ غير أولية

عدد مرفوع $\rightarrow (41)^2 - 41 + 41 = 41 \times 41$

أعداد أولية

$$N_k = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k + 1$$

$$N_1 = 2 + 1 = 3$$

$$N_2 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$$

$$N_3 = 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31$$

ظن أنهم من أن هذه الأعداد أعداد أولية لكن هذا بعدكم إجابات أن

$$N_6 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1$$

هواييك

التحليل بطريقة مرموزة

لنعتبر هنا شيئاً أي عدد زوجي $n > 1$ له عامل أولي وهذا يمكن كتابته كعامل أولي
بشكل أي تحليل الأعداد الفردية له الأهمية الكبرى ويستخرج كيفية التحليل
بالتفصيل الآتي:

مقدمة - 1

إذا كان n عدداً زوجياً مرموزاً $(1 < n)$ فيمكن دائماً كتابته كحاصل لعدد
عدد من العوامل زوجين $n = a \cdot b$ إذاً فقط إذا أمكن كتابته كحاصل
بين مربعين

$$n = a \cdot b \Leftrightarrow n = x^2 - y^2 \quad \text{أي}$$

البرهان

(مع) نعلم أولاً أن $n = a \cdot b$ حيث a, b أعداد زوجية مرموزة فردية فسنكتب

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = a \cdot b = n$$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 = n$$

أي كسند n هو فرق بين مربعين.

$1 < n$

(\Rightarrow) نعلم أن n هو فرق بين مربعين أي إذا كان $n = x^2 - y^2$ فسنكتب

$$x > y \quad \text{وهذا} \quad x - y > 0 \quad \text{وبالتالي} \quad \text{حتى}$$

$$x + y > 0$$

منهية ثانية

$$n = x^2 - y^2 = \underbrace{(x-y)}_a \underbrace{(x+y)}_b = a \cdot b$$

وبالتالي n هو حاصل عددين زوجين وفرديين من الطرفين.

نقطة ١: الطريقة موزعة قليلًا بعد ذلك ، إلى ما يلي في الكتب عند مستوى x و y كقوله العلاقة

$$n = x^2 - y^2$$

$$y^2 = x^2 - n$$

إذا بدأنا بالبحث عن x و y في n فقط العلاقة $x^2 - n = y^2$ هو ما نريه
 $n < x^2$ ثم نبحث بين الأعداد

$$x^2 - n, (x+1)^2 - n, (x+2)^2 - n, \dots$$

من تلك التي قيمة n أكبر من \sqrt{n} فقط استمر
 ونجعل x أصغر $m^2 - n$ يكون مربع كامل.
 إن تلك هي تلك التي نريها منتهية.

مثال ١

هناك أعداد 315 الطريقة موزعة

315 عدد غير مربع

$$(17)^2 < 315 < (18)^2$$

$$(18)^2 - 315 = 9 = (3)^2$$

$$\Rightarrow 315 = (18)^2 - (3)^2 = (18-3)(18+3)$$

$$= 15 \cdot 21$$

$$315 = 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

$$\begin{array}{r|l} 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

مثال ٢

هناك أعداد $n = 119143$ الطريقة موزعة

$$(345)^2 < 119143 < (346)^2$$

ليس مربع كامل

$$(346)^2 - 119143 = 573$$

$$(347)^2 - 119143 = 1266$$

ليس مربع كامل

$$(352)^2 - 119143 = 4761 = (69)^2$$

$$(352)^2 - (69)^2 = 119143$$

$$(352+69)(352-69) = 119143$$

$$421 \times 283 = 119143$$

عدد أولي عدد أولي

أعداد أولية 283 عدد أولي

2, 3, 5, 7, 11, 13

العدد 283 هو أولي
العدد 421 هو أولي

العدد 283 هو أولي

معادلات خطية ذات متغيرين

• معادلتان خطيتان غير متوازيتين لن يكون لهما حل.

$$ax + by = n$$

لكن كل معادلة من الشكل

n و a, b أعداد صحيحة

هذه معادلات من هذا الشكل فبعضها صحيحة و x و y تحقق هذه المعادلة.

مثلاً:

$$4x + 2y = 7$$

الطرف الأيسر زوجي والطرف الأيمن فردي، واضح أن المعادلة مستحيلة الحل.

أي لا يوجد x و y تحقق المعادلة.

مثلاً:

$$3x + 6y = 18$$

$$3(4) + 6(1) = 18$$

لأنه $(4, 1)$ تحقق المعادلة.

$$3(0) + 6(3) = 18$$

لأنه $(0, 3)$ تحقق المعادلة.

$$3(2) + 6(2) = 18$$

لأنه $(2, 1)$ تحقق المعادلة.

أي أن المعادلة قد تكون مستحيلة وقد يكون لها حلولاً لا نهائية.

البرهنة الآتية تبين الشرط اللازم والكافي لوجود حلول للمعادلة الخطية ذات المتغيرين.

والتي هي العلاقة التي تبين كل الحلول بعد معرفة أحدها.

مبرهنة:

تكن لدينا معادلة $ax + by = c$ حيث $a, b, n \in \mathbb{Z}$ غير صفرية معاً.

فإن هذه المعادلة لها حلول إذا وفقط إذا كان القاسم المشترك الأكبر

لـ a و b يقسم c .

$$d = \gcd(a, b) \mid c$$

وإذا كان (x_0, y_0) حلاً للمعادلة فإن جميع الحلول تعطى بالعلاقات الآتية:

هوايتك

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d} \cdot t \\ y = y_0 - \frac{a}{d} \cdot t \end{cases} ; t \in \mathbb{Z}$$

مثال سؤال حل

كيف نحل المعادلة الآتية

$$172x + 20y = 1000$$

كيف نحل المعادلة

بأن نعدها 172, 20

1. نكتبها على شكل مجموع

2. نحل المعادلة الآتية

$$\begin{cases} 172 = (8)20 + 12 \\ 20 = 1(12) + 8 \\ 12 = 1(8) + 4 \\ 8 = 2(4) + 0 \end{cases} \quad \delta(172, 20) = 4$$

$$4 = 12 - 1 \cdot 8 = 12 - 1(20 - 12) = 2(12) - 1(20)$$

$$= -(20) + 2[172 - (8)20] = (-17)20 + (2) \cdot 172$$

$$4 \mid 1000 \Rightarrow \text{نوجد المعادلة على}$$

$$4 = (172)(2) + (20)(-17)$$

نضرب كلا طرفي المعادلة على 250 فنحصل على 1000

$$1000 = (172)(500) + (20)(-4250)$$

وبالتالي $(x_0, y_0) = (500, -4250)$ حل المعادلة المعطاة

$$x = x_0 + \frac{b}{d} t$$

$$y = y_0 + \frac{a}{d} t$$

$t \in \mathbb{Z}$

موازيك

$$x = 500 + \frac{20}{4} \cdot t$$

$$t \in \mathbb{R}$$

$$y = -4250 - \frac{172}{4} t$$

$$\text{الصيغة العامة لـ } \begin{cases} x = 500 + 5t \\ y = -4250 - 43t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

ملاحظة:

من أجل أن تكون القيم الحقيقية، يجب أن تكون $x > 0$ و $y > 0$.

$$500 + 5t > 0 \quad \text{أي} \quad x > 0$$

$$-4250 - 43t > 0 \quad \text{أي} \quad y > 0$$

البيانات السابقة $t \in \mathbb{R}$ حيث نتحقق من التوافق:

$$5t > -500 \quad \Rightarrow \quad t > -100$$

$$-43t > 4250 \quad \Rightarrow \quad t < \frac{4250}{-43} = -98,83$$

$$-100 < t < -98,83$$

ولأن $t \in \mathbb{R}$ فإنه يجب أن تكون t عددًا صحيحًا. وعندئذ يكون الحل هو:

$$t = -99$$

$$x = 500 + 5(-99) = 5$$

$$y = -4250 - 43(-99) = 7$$

ملاحظة:

$$6x + 5y = 22$$

من أجل أن تكون القيم الحقيقية، يجب أن تكون $x > 0$ و $y > 0$.

$$7x + 9y = 5$$

من أجل أن تكون القيم الحقيقية، يجب أن تكون $x > 0$ و $y > 0$.

$$15x + 12y = 66$$

• تلاميذ - مشاهير

تعريف

نقول ان العدد الصحيح z يسمى ثلاثي فيثاغورث أولي اذا كان
 (x, y, z)

$$z^2 = x^2 + y^2 \quad \wedge \quad d(x, y, z) = 1$$

مثال

(3, 4, 5) ثلاثي فيثاغورث أولي
 (5, 12, 13) ثلاثي فيثاغورث أولي
 (8, 15, 17) ثلاثي فيثاغورث أولي

نصت على طائفة من التمارين

عند دراسة

اذا كان (x, y, z) ثلاثي فيثاغورث أولي فلهذا العدد الثلاثة
 أولية نسبياً عن ضمن

الدلائل

لنقول ان $d(x, y) = d$ وبما ان d له عدد أولي مثل p قسمه اي
 $p | x$ \wedge $p | y$

وعندها

$$p | x^2 \quad \wedge \quad p | y^2$$

وبما ان $z^2 = x^2 + y^2$ فلهذا

$$p | (x^2 + y^2) = z^2 \Rightarrow p | z$$

بما ان p عدد أولي فلهذا p يقسم x, y, z وهذا يتطلب ان (x, y, z) ليس أولياً وبما ان
 $d(x, y) = 1$ يتناقض هذا الفرض اذاً

اي العدد z أولية نسبياً x, y

$$d(y, z) = 1$$

$$d(z, x) = 1$$

$$x = 500 + \frac{20}{4} \cdot t$$

$$t \in \mathbb{R}$$

$$y = -4250 - \frac{172}{4} t$$

$$\text{الصيغة العامة لـ } \begin{cases} x = 500 + 5t \\ y = -4250 - 43t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

ملاحظة:

من أجل أن تكون القيم الحقيقية، يجب أن تكون $x > 0$ و $y > 0$.

$$500 + 5t > 0 \quad \text{أي} \quad x > 0$$

$$-4250 - 43t > 0 \quad \text{أي} \quad y > 0$$

البيانات السابقة $t \in \mathbb{R}$ حيث نتحقق من التوافق:

$$5t > -500 \quad \Rightarrow \quad t > -100$$

$$-43t > 4250 \quad \Rightarrow \quad t < \frac{4250}{-43} = -98,83$$

$$-100 < t < -98,83$$

ولأن $t \in \mathbb{R}$ فإنه يجب أن تكون t عددًا صحيحًا. وعندئذ يكون الحل هو:

$$t = -99$$

$$x = 500 + 5(-99) = 5$$

$$y = -4250 - 43(-99) = 7$$

ملاحظة:

$$6x + 5y = 22$$

من أجل أن تكون القيم الحقيقية، يجب أن تكون $x > 0$ و $y > 0$.

$$7x + 9y = 5$$

من أجل أن تكون القيم الحقيقية، يجب أن تكون $x > 0$ و $y > 0$.

$$15x + 12y = 66$$

وهذا يمكن أن يكون

$$z^2 = x^2 + y^2 = 8(M_1 + M_2) + 2 = 8M + 2, \quad M = M_1 + M_2 \in \mathbb{Z}$$

وبالتالي z لا يمكن أن يكون فردياً (لأنه لو كان فردياً لوجب أن يكون شكله

$$(z^2 = 8M + 1)$$

لو كان z زوجياً لوجب أن يكون شكله من النوع

$$z = 2n$$

$$z^2 = 4n^2$$

لا يمكن أن يكون من الشكل $8M + 2$ في الحالة

$$z^2 = 8M + 2$$

لا يمكن

بذلك x و y ليسا فرديين معاً ولا مطلقاً أنهما ليسا زوجيين معاً وبالتالي

أحداهما زوجي والآخر فردي

مقدمة - ٤ -

إذا كان حاصل ضرب عددين $a, b = c^n$ و $d(a, b) = 1$

أوليت فيما بينها عدد n لخاص n فعدد زوجي كدرا

مجموع

صحيحاً a, b, c حيث أن

$$d(a, b) = 1 \wedge a, b = c^n \Rightarrow a = (a_1)^n, \quad b = (b_1)^n$$

مقدمة - ٥ -

١- جميع الحلول الصحيحة المعزولة لمعادلة فيثاغورث

$$x^2 + y^2 = z^2$$

حيث x, y, z زوجي، x فردي و $d(x, y, z) = 1$

تصل بالعلاقات الآتية:

$$x = r^2 - s^2$$

$$y = 2rs$$

$$z = r^2 + s^2, \quad d(r, s) = 1$$

حيث r, s أعداد صحيحة غير صفرية أوليا فيما بينها أحدهما فردي والآخر زوجي

الحال الثاني يوضح ذلك

ملاحظة: $x=15$ هي القيمة الوحيدة التي تحقق المعادلة

$$15 = r^2 - s^2 = (r-s)(r+s)$$

$$r-s=1 \wedge r+s=15 \Rightarrow 15=15.1$$

$$r=8 \quad s=7$$

$$r-s=3 \wedge r+s=5 \Rightarrow 15=5.3$$

$$r=4 \quad s=1$$

$$x=r^2-s^2$$

$$r=0 \quad s=7 \Rightarrow 15$$

أثبت أنه إذا كان (x, y, z) ثلاثية فيثاغورس أولية
فإن x هو العدد الزوجي و y, z عددان فرديان

أثبت أن نصف قطر الدائرة الخارجة لثلاثية فيثاغورس هو $\frac{1}{2}x$

نقطة

(نقطة فيثاغورس)

مربع

$$S = \frac{1}{2}xy$$



$$S = \frac{1}{2}x(x+y+z)$$

$$R = \frac{x+y+z}{2}$$

نصف قطر الدائرة